

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Fillera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit în barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. **2 puncte** pentru răspunsul: Transilvania **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
2. **2 puncte** pentru oricare dintre răspunsurile: *li s-a îngrădit politica externă*, domnii Țării Românești și Moldovei susțin o politică antiotomană **etc. Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).**
3. **câte 3 puncte** pentru oricare două dintre răspunsurile: Țara Românească, Moldova, Imperiul Otoman/Poarta **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).** **(3px2=6p)**
4. **3 puncte** pentru scrierea literei **A**
5. **7 puncte** pentru scrierea oricărei relații cauză-efect stabilite între două informații selectate din sursa **B**, precizând rolul fiecăreia dintre aceste informații (*cauză*, respectiv *efect*)
Exemple: cauză: *În același context, poziția Principatului între otomani și Habsburgi conferea, din punct de vedere militar și strategic, un considerabil avantaj pentru cel care îl controla* și efect: *Prin urmare, stăpânirea noului Principat autonom a constituit o preocupare constantă a politicii externe a celor două imperii. SAU cauză: datorită faptului că, după epoca sultanului Süleyman, Imperiul Otoman a intrat într-o fază staționară* și efect: *Habsburgii vor relua disputa etc.*
6. **câte 1 punct** pentru menționarea oricăror alte două fapte istorice la care participă românii în secolul al XVI-lea, în afara celor precizate în sursele **A** și **B** **(1px2=2p)**
Exemple: aderarea la Liga Sfântă, Lupta de la Giurgiu, Tratatul de la Mânăstirea Dealu **etc.**
câte 2 puncte pentru prezentarea fiecărui fapt istoric menționat - o scurtă expunere în care sunt precizate două informații referitoare la faptul istoric **(2px2=4p)**
7. **4 puncte** pentru menționarea oricărei asemănări între două acțiuni desfășurate de români în relațiile internaționale din secolele al XVII-lea – al XVIII-lea **Exemple:** au caracter antiotoman, colaborarea cu state creștine **etc. Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**

SUBIECTUL al II – lea

(30 de puncte)

1. **2 puncte** pentru răspunsul: Al. I. Cuza **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
2. **2 puncte** pentru răspunsul: al XIX-lea **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
3. **3 puncte** pentru oricare dintre răspunsurile: Franța, Anglia
3 puncte pentru menționarea oricărei decizii adoptate în cadrul acestui eveniment, precizate în sursa dată **Exemple:** *Franța renunța să mai susțină unirea deplină a Principatelor sub un prinț străin*, Anglia a fost de acord cu anularea alegerilor falsificate din Moldova **etc. Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).**
4. **câte 3 puncte** pentru menționarea, din sursa dată, a oricăror două informații referitoare la Adunările ad-hoc **(3px2=6p)**
Exemple: *În luna octombrie 1857, s-au deschis la București și Iași cele două Adunări ad-hoc; aveau prerogative limitate; Adunările ad-hoc au votat declarații de unire a Moldovei cu Țara Românească etc. Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).*

5. **4 puncte** pentru formularea, pe baza sursei date, a oricărui punct de vedere referitor la Convenția de la Paris
câte 3 puncte pentru selectarea, din sursa dată, a oricăror două informații care susțin punctul de vedere formulat **(3px2=6p)**
Exemple: Convenția de la Paris stabilea organizarea instituțională a Principatelor Române. Informațiile care susțin punctul de vedere sunt: *Convenția prevedea că noul stat se va numi Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești, va avea doi domni pământeni, două capitale, două guverne și două foruri legislative distincte și la Focșani se înființau o Comisie Centrală și o Înalță Curte de Casație care să elaboreze legi comune SAU Convenția de la Paris are consecințe politice pentru Principatele Române. Informațiile care susțin punctul de vedere sunt: *În conformitate cu prevederile Convenției de la Paris, în Principate au fost constituite comisii provizorii [...] având sarcina de a asigura formarea adunărilor electivă, care urmau să desemneze cei doi domnitori. și La București, [...] ideea alegerii aceluiași domnitor – și ca urmare a lipsei de precizie a Convenției de la Paris, care nu interzicea explicit alegerea aceleiași persoane ca domnitor în cele două Principate – a căpătat susținere. etc. **Punctajul total (10 puncte) sau cel parțial (7 puncte) se acordă răspunsului care cuprinde atât punctul de vedere, cât și informațiile/informația. Nu se punctează doar punctul de vedere sau doar informațiile/informația.****
6. **4 puncte** pentru argumentarea afirmației date - prezentarea oricărui fapt istoric relevant (**de exemplu:** participarea României la războiul ruso-otoman, aderarea României la Tripla Alianță etc.) prin precizarea a două informații referitoare la acest fapt și prin utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea (*deoarece, pentru că etc.*) și concluzia (*așadar, astfel etc.*)

SUBIECTUL al III – lea

(30 de puncte)

Informația istorică – 24 de puncte distribuite astfel:

- **2 puncte** pentru precizarea oricărei acțiuni politice desfășurate în România, în perioada 1946-1947 (**de exemplu:** falsificarea rezultatului alegerilor parlamentare, înlăturarea monarhiei constituționale etc.)
- **câte 3 puncte** pentru menționarea oricăror două practici politice utilizate în România, în perioada stalinismului (**de exemplu:** adoptarea Constituției din 1948, cenzura, colectivizarea etc.) și a oricărui aspect referitor la fiecare dintre acestea (**de exemplu:** legitimează regimul totalitar, prevede constituirea Marii Adunări Naționale etc., încalcă drepturile și libertățile cetățenilor, se redactează lista publicațiilor interzise etc., vizează desființarea proprietății private în mediul rural, determină represiunea țăranilor care se opun colectivizării etc.) **(3px4=12p)**
- **2 puncte** pentru menționarea oricărui fapt istoric prin care România participă la relațiile internaționale din perioada *Războiului rece* (**de exemplu:** fondarea Pactului de la Varșovia, Conferința de la Helsinki etc.)
3 puncte pentru prezentarea faptului istoric menționat - o scurtă expunere în care sunt precizate două informații referitoare la faptul istoric și se utilizează relația cauză-efect
1 punct pentru precizarea doar a unei informații referitoare la faptul istoric
- **1 punct** pentru formularea oricărui punct de vedere referitor la schimbarea regimului politic din România la sfârșitul secolului al XX-lea (**de exemplu:** La sfârșitul secolului al XX-lea, prin schimbarea regimului politic, în România se instaurează democrația.; Schimbarea regimului politic din România a fost realizată, la sfârșitul secolului al XX-lea, prin acțiuni anticomuniste. etc.)
4 puncte pentru **sustinerea punctului de vedere** formulat printr-un argument istoric – prezentarea oricărui fapt istoric relevant, prin precizarea a două informații referitoare la acest fapt și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea (*deoarece, pentru că etc.*) și concluzia (*așadar, astfel etc.*)
Ordonarea și exprimarea ideilor menționate – 6 puncte distribuite astfel:
 - **2 puncte** pentru **utilizarea limbajului istoric** adecvat
1 punct pentru utilizarea parțială a limbajului istoric adecvat
 - **1 punct** pentru **structurarea eseului** (introducere - cuprins - concluzie)
 - **2 puncte** pentru **respectarea succesiunii cronologice/logice** a faptelor istorice
1 punct pentru respectarea parțială a succesiunii cronologice/logice a faptelor istorice
 - **1 punct** pentru **respectarea limitei de spațiu**

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

Lesen Sie folgende Quellen aufmerksam durch:

A. „Beginnend mit dem 16. Jahrhundert [...] wurde die osmanische Vorherrschaft immer bedrückender und die Pflichten dem Sultan gegenüber zahlreicher. [...] Die Kontrolle des Osmanischen Reiches, das sich über die ganze Balkanhalbinsel bis zur Mittleren Donau / Dunărea Mijlocie erstreckte, steigerte das Gefühl der Unsicherheit der Völker aus der Gegend. Die Rumänen, die sich des schweren Schicksals der Griechen, Bulgaren, Albaner, Serben, Kroaten, Ungarn usw. bewusst waren, die unter osmanischer Besatzung standen, setzten den Widerstand trotzdem fort und bewahrten die Autonomie ihrer Länder. Obwohl sie den Türken Tribut zahlten und andere Abgaben leisteten, obwohl ihre Außenpolitik eingeschränkt wurde und sie dem Sultan einige ihrer Gebiete abtreten mussten, bewahrten die Rumänen ihre Staaten mit eigenen Herrschern; den Türken war die dauerhafte Niederlassung und der Grundbesitz es verboten sich dauerhaft in diesen niederzulassen und Grundbesitz zu haben, die Christen für den Islam zu gewinnen und Moscheen zu errichten [...]

In den ersten Jahrzehnten des 16. Jahrhunderts führten die Fürsten der Walachei / Țara Românească und der Moldau / Moldova eine Politik antiosmanischer Allianzen, obwohl sie lange Zeit den Türken weiterhin Tribut bezahlten. [...] Die Fürsten der Moldau, von Petru Rareș bis zu Ion Vodă und Aron Vodă [...] hatten eine aktive antiosmanische Politik, die unter dem Zeichen des bewaffneten Widerstandes und der blutigen Schlachten stand.” (I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Die Umwandlung Siebenbürgens / Transilvania in ein autonomes Fürstentum unter der Vorherrschaft der Pforte [Osmanisches Reich] war für die Habsburger ein schwerer Schlag, für die das wirtschaftliche Potential dieser Provinz eine starke Anziehungskraft hatte. In demselben Kontext ermöglichte die Lage des Fürstentums zwischen Osmanen und Habsburgern einen bemerkenswerten militärischen und strategischen Vorteil für denjenigen, der das Fürstentum kontrollierte. Folglich war die Herrschaft über das neue autonome Fürstentum eine konstante Priorität der Außenpolitik beider Imperien. Zur Zeit des Fürsten Johann Sigismund wurde Siebenbürgen zum Schauplatz heftiger Zusammenstöße, die nach dem Tod Süleymans des Prächtigen (1566) wieder aufflammten. Die Habsburger nahmen den Zwist wieder auf, vor allem weil nach der Regierungszeit des Sultans Süleyman das Osmanische Reich in eine Phase des Stillstands eingetreten war. [...] Der am 21. Februar 1568 geschlossene Frieden, mit einer Dauer von acht Jahren, bestätigte die Schwächen der Osmanen. Der Kaiser behielt das westliche Ungarn, Dalmatien, Kroatien und Slowenien unter seiner Herrschaft, während Johann Sigismund und die Fürsten der Walachei und der Moldau die Kontrolle über die Territorien behielten, die tatsächlich in ihrem Besitz waren.” (I. A. Pop, T. Năgler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Lösen Sie ausgehend von diesen Quellen folgende Aufgaben:

1. Nennen Sie das autonome Fürstentum aus Quelle **B**. **2 Puncte**
2. Bestimmen Sie, aus Quelle **A**, eine Information bezüglich der Außenpolitik der rumänischen Fürsten. **2 Puncte**
3. Erwähnen Sie zwei geschichtliche Räume, die sowohl in Quelle **A** als auch in Quelle **B** genannt werden. **6 Puncte**
4. Schreiben Sie auf das Prüfungsblatt den Buchstaben für die Quelle, in der behauptet wird, dass die Balkanvölker unter der Herrschaft der Osmanen standen. **3 Puncte**

5. Schreiben Sie eine Ursache-Folge-Beziehung zwischen zwei Informationen aus der Quelle **B**. Bestimmen Sie die Rolle jeder dieser Informationen (*Ursache* bzw. *Folge*) **7 Punkte**
6. Stellen Sie zwei geschichtliche Ereignisse dar, andere als die in den Quellen **A** und **B** erwähnten, an denen die Rumänen im 16. Jahrhundert teilnahmen. **6 Punkte**
7. Erwähnen Sie eine Ähnlichkeit zwischen zwei Aktionen der Rumänen in den internationalen Beziehungen des 17.-18. Jahrhunderts. **4 Punkte**

THEMA II

(30 Punkte)

Lesen Sie folgende Quelle aufmerksam durch:

„ Im August 1857 stimmten Napoleon III. und die Königin Victoria in Osborne einem Kompromiss in der rumänischen Frage zu: Frankreich verzichtete auf die Idee der vollständigen Vereinigung der Fürstentümer / Principatele unter einem fremden Prinzen und England gab sein Einverständnis für die Annullierung der gefälschten Wahlen in der Moldau / Moldova und die Organisierung von Neuwahlen. [...]

Im Oktober 1857 wurden in Bukarest / București und Jassy / Iași zwei Ad-hoc-Versammlungen / Adunări ad-hoc einberufen, die [...] jedoch eingeschränkte Befugnisse hatten. Sie wurden von den Großmächten nur dafür geschaffen, die Meinung des rumänischen Volkes zur Vereinigung zu erfahren. Trotzdem wählten die Ad-hoc-Versammlungen mit großer Begeisterung die Vereinigung der Moldau mit der Walachei / Țara Românească; es wurden auch der Name des zukünftigen souveränen Staates (Rumänien / România) sowie der Wunsch ausgesprochen, eine fremde Erbdynastie einzusetzen. [...]

Nach Verhandlungen und Kompromissen, [...] wurde 1858 die Pariser Konvention / Convenția de la Paris unterzeichnet [...]. Die Konvention sah vor, dass der neue Staat den Namen *Die Vereinigten Fürstentümer der Moldau und der Walachei / Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești* tragen wird, zwei einheimische Fürsten, zwei Hauptstädte, zwei Regierungen und zwei legislative Foren haben wird. [...] Die Armeen der beiden Länder befanden sich unter einheitlicher Führung; in Focșani wurden eine Zentralkommission und ein Hoher Gerichtshof gegründet, die gemeinsame Gesetze verfassen sollten, welche in Zukunft zu einer legislativen und administrativen Vereinheitlichung führen sollten.

Die Konvention verbat nicht ausdrücklich die vollständige Vereinigung, sie überließ es dem rumänischen Volk, die geeigneteste Lösung zu finden. [...] Gemäß der Vorschriften der Pariser Konvention wurden in den Fürstentümern provisorische Kommissionen gegründet [...], die als Aufgabe die Gründung der Wahlversammlungen hatten, welche die beiden Fürsten bestimmen sollten [...]. In Jassy, der Hauptstadt der Moldau, wurde Al. I. Cuza einstimmig als Herrscher gewählt. [...] In Bukarest, erhielt die Idee der Wahl desselben Fürsten Unterstützung, auch infolge der fehlenden Genauigkeit der Pariser Konvention, welche die Wahl derselben Person in beiden Fürstentümern nicht ausdrücklich verbot. [...] Die Folge war die einstimmige Wahl von Al. I. Cuza.”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

Lösen Sie ausgehend von dieser Quelle folgende Aufgaben:

1. Nennen Sie den rumänischen Fürsten aus der Quelle. **2 Punkte**
2. Bestimmen Sie das Jahrhundert, auf welches sich die Quelle bezieht. **2 Punkte**
3. Erwähnen Sie einen Staat aus der Quelle, der am Ereignis in Osborne teilgenommen hat, und einen Beschluss, der dort gefasst wurde. **6 Punkte**
4. Erwähnen Sie aus der Quelle zwei Informationen bezüglich der Ad-hoc-Versammlungen. **6 Punkte**
5. Formulieren Sie, anhand der Quelle, einen Standpunkt zu der Pariser Konvention. Stützen Sie diesen mit zwei Informationen aus der Quelle. **10 Punkte**
6. Argumentieren Sie anhand eines relevanten geschichtlichen Ereignisses die Behauptung, dass der rumänische Staat in der Zeitspanne 1875-1900 an internationalen Beziehungen teilnahm. (Bewertet wird die Darstellung eines relevanten geschichtlichen Ereignisses und die Verwendung der Konnektoren, die Ursache und Schlussfolgerung ausdrücken.) **4 Punkte**

THEMA III

(30 Punkte)

Erarbeiten Sie auf etwa zwei Seiten ein Essay über Rumänien / România in der Nachkriegszeit. Beachten Sie dabei Folgendes:

- Die Bestimmung einer politischen Handlung, die in der Zeitspanne 1946-1947 in Rumänien stattgefunden hat;
- Die Erwähnung zweier politischer Maßnahmen Rumäniens aus der stalinistischen Zeit sowie je eines Aspekts, der sich darauf bezieht;
- Die Darstellung eines geschichtlichen Ereignisses, durch welches Rumänien während des Kalten Krieges an den internationalen Beziehungen teilgenommen hat.
- die Formulierung eines Standpunkts zum Regimewechsel in Rumänien am Ende des 20. Jahrhunderts. Stützen Sie diesen mit Hilfe eines geschichtlichen Arguments.

Anmerkung! Benotet wird auch die Verwendung des **geeigneten geschichtlichen Wortschatzes**, die **Strukturierung des Essays**, die Hervorhebung der **Beziehung Ursache-Folge**, die Erarbeitung des **geschichtlichen Arguments** (die Darstellung eines relevanten geschichtlichen Ereignisses und die Verwendung der Konnektoren, die Kausalität und Schlussfolgerung ausdrücken), die Beachtung der chronologischen/logischen Reihenfolge und die **Einhaltung der vorgegebenen Seitenanzahl**.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. TÉTEL

(30 punct)

Olvassa el figyelmesen az alábbi forrásokat:

A. „A XVI. század közepétől [...] a török fennhatóság nyomasztóbb lett, a szultánnak fizetendő kötelezettségek egyre növekedtek. [...] A Török Birodalom fennhatósága kiterjedt az egész Balkán-félszigetre a Duna középső folyásáig, fokozva a régióban élő népek bizonytalansági érzését. Ugyanakkor a románok ismerve a török fennhatóság alatt élő görögök, bolgárok, albánok, szerbek, horvátok, magyarok, stb. nehéz sorsát, folytatták az ellenállást, és megőrizték országaik autonóm jogállását. Annak ellenére, hogy adót és ajándékokat fizettek a törököknek, illetve fokozódott a külpolitikájuk, mivel bizonyos területeket át kellett adniuk a szultánnak, a románok megőrizték államaikat saját uralkodóikkal, a törököknek tilos volt letelepedni vagy földet birtokolni ott, tilos volt áttéríteni a keresztényeket az iszlám hitre és mecseteket építeni. [...]

A XVI. század első évtizedeiben, Havasalföld (*Țara Românească*) és Moldva (*Moldova*) uralkodói törökellenes politikát folytattak annak ellenére, hogy hosszú ideje a törökök adófizetői voltak. [...] Olyan moldvai uralkodók mint Petru Rareș, Ion Vodă és Aron Vodă [...] aktív törökellenes politikát folytattak fegyveres ellenállással és véres csatákkal.”

(I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Erdély (*Transilvania*) török [Oszmán Birodalom] fennhatóság alatti önálló Fejedelemséggé alakítása komoly csapást jelentett a Habsburgoknak, mivel a terület gazdasági lehetőségei komoly vonzerővel bírtak. Ebben a helyzetben a Fejedelemség oszmánok és Habsburgok közötti pozíciója, katonai és stratégiai szempontból komoly előnyt jelentett annak, aki azt ellenőrizte. Következésként az új autonóm Fejedelemség feletti uralom állandó elfoglaltságot jelentett a két birodalom külpolitikája számára. János Zsigmond időszakában, Nagy Szulejmán szultán halála után (1566) Erdély komoly összecsapások színtere lett. A Habsburgok újra felvették a harcot, mivel Szulejmán szultán uralkodása után az Oszmán Birodalom egy stagnálási időszakba lépett. [...] Az 1568. február 21-én nyolc évre aláírt béke kiemelte a törökök gyenge pontjait. A császár ellenőrzése alatt maradt Magyarország nyugati része, Dalmácia, Horvátország és Szlovénia, ugyanakkor János Zsigmond, Havasalföld és Moldva uralkodói is megtarthatták azokat a területeket, amelyek ellenőrzésük alatt voltak.”

(I. A. Pop, T. Nágler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Válaszoljon a források alapján az alábbi követelményekre:

1. Nevezze meg a **B** forrásban megjelenő önálló fejedelemséget! **2 pont**
2. Írjon ki az **A** forrásból egy, a román uralkodók külpolitikájára vonatkozó információt! **2 pont**
3. Nevezzen meg két olyan történelmi térséget, amely az **A** és a **B** forrásban is előfordul! **6 pont**
4. Írja ki a vizsgalapra annak a forrásnak a betűjelét, amely azt támasztja alá, hogy a balkáni népek török fennhatóság alatt éltek! **3 pont**
5. Írjon ki a vizsgalapra az **B** forrásból két olyan információt, amelyek között ok-okozati összefüggés van, és emelje ki mindkét információ szerepét (*ok*, illetve *okozat*)! **7 pont**
6. Mutasson be két olyan történelmi eseményt a XVI. századból, amelyekben a románok részt vettek, másokat, mint amelyekre az **A** és a **B** források vonatkoznak! **6 pont**
7. Határozzon meg egy hasonlóságot két olyan tevékenység között, amely a nemzetközi kapcsolatokra vonatkozik, és amelyben részt vettek a románok a XVII-XVIII. századokban! **4 pont**

II. TÉTEL

(30 punct)

Olvassa el figyelmesen az alábbi forrást:

„1857 augusztusában, Osborne-ban, III. Napóleon és Viktória királynő megegyezésre jutottak a román kérdést illetően: Franciaország lemond a Fejedelemségek idegen uralkodó alatti teljes egyesüléséről, míg Anglia beleegyezett a Moldvában (*Moldova*) meghamisított választások eredményének eltörlésébe és újak megszervezésébe.

1857 októberében Bukarestben (*București*) és Iașiban (*Iași*) megnyitották a két ad-hoc gyűlést, amelyeknek [...] korlátozott jogköre volt. Ezeket a nagyhatalmak hozták létre a céllal, hogy kikérjék a románok véleményét az egyesülésről. Ugyanakkor az ad-hoc gyűlések lelkesen megszavazták Moldva és Havasalföld (*Țara Românească*) egyesülésének nyilatkozatait, előrevetítve a létrehozandó önálló állam nevét is: Románia (*România*), valamint annak óhaját, hogy egy külföldi származású uralkodó alatt megteremtett örökletes uralom alakuljon ki. [...]

Tárgyalások és kompromisszumok után, [...] 1858-ban aláírták a Párizsi konvenciót (*Convenția de la Paris*) [...]. A konvenció előírta, hogy az új államnak *Moldva és Havasalföld Egyesült Fejedelemségek (Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești)* lesz a neve, két hazai uralkodója, két fővárosa, két kormánya és két különálló törvényhozása lesz. [...] A két állam hadserege egységes vezetés alá került és Focșaniban (*Focșani*) létrehozták a Központi Bizottságot és a Legfelsőbb Semmitőszéket, amelyeknek feladata, hogy közös törvényeket alkosson meg, és a jövőben egységesítse a törvényhozást és a közigazgatást. A konvenció nem tiltotta közvetlen módon a teljes egyesülést, és meghagyta a román nép számára annak a lehetőségét, hogy megtalálja a leginkább megfelelő megoldást. [...] A Párizsi konvenció előírásainak megfelelően a Fejedelemségekben ideiglenes bizottságokat hoztak létre [...] azzal a feladattal, hogy biztosítsák a választói gyűlések megalakulását, amelyeknek feladata két uralkodót jelöljenek. [...] Iașiban, Moldva fővárosában, a jelenlevő küldöttek egyhangúan Al. I. Cuzat választották uralkodónak. [...] Bukarestben, [...] ugyanannak a személynek a megválasztásának a gondolata – annak következtében, hogy a Párizsi konvenció nem tiltotta direkt módon ugyanazon személy uralkodóvá választását a két Fejedelemségben – támogatókra lelt [...]. A következmény Al. I. Cuza egyhangú megválasztása volt.”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

A forrásból kiindulva válaszoljon az alábbi követelményekre:

1. Nevezze meg a forrásban említett román uralkodót! **2 pont**
2. Pontosítsa a századot, amelyre az adott forrás vonatkozik! **2 pont**
3. Nevezzen meg a forrás alapján egy, az Osborne-i eseményben érintett államot és egy döntést, amelyet az esemény keretében hoztak! **6 pont**
4. Nevezzen meg a forrás alapján két információt az ad-hoc gyűlésekre vonatkozóan! **6 pont**
5. Fejtse ki véleményét az adott forrásból kiindulva a Párizsi konvencióval kapcsolatosan, és támassza alá a fenti forrásból vett két információval! **10 pont**
6. Érveljen egy megfelelő történelmi tény bemutatásával azon kijelentés mellett, miszerint a románok részt vettek az 1875-1900 közötti nemzetközi kapcsolatokban! (Pontot ér a megfelelő történelmi tény bemutatása, valamint az ok-okozatiságot és a következtetést kifejező szavak használata.) **4 pont**

III. TÉTEL

(30 punct)

Írjon egy megközelítőleg két oldalas esszét a második világháború utáni Romániáról, figyelembe véve az alábbi szempontokat:

- nevezzen meg egy olyan eseményt, amely Romániában zajlott 1946-1947 között;
- nevezzen meg két Romániában alkalmazott politikai gyakorlatot a sztálinizmus korszakában, és ezek egy-egy sajátosságát;
- mutasson be egy olyan történelmi eseményt, amely által Románia részese volt a nemzetközi kapcsolatoknak a hidegháború korszakában;
- fejtse ki véleményét a román politikai rendszer megváltozásával kapcsolatosan a XX. század végén, és támassza ezt alá egy történelmi érveléssel!

Figyelem! Pontot ér a megfelelő történelmi nyelvezet használata, az esszé felépítése, az ok-okozati összefüggések kiemelése, a történelmi érv kidolgozása (megfelelő történelmi tény bemutatása, az ok-okozatiságot és a következtetést kifejező szavak használata), a történelmi események megfelelő időrendi/logikai sorrendjének, valamint a terjedelmi követelményeknek a betartása is.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Citiți, cu atenție, sursele de mai jos:

A. „De la jumătatea secolului al XVI-lea [...] suzeranitatea otomană devine mai apăsătoare, iar obligațiile față de sultan sporesc. [...] Controlul Imperiului Otoman, extins în toată Peninsula Balcanică până la Dunărea Mijlocie, sporea sentimentul de nesiguranță al popoarelor din această regiune. Totuși, românii, conștienți de soarta grea a grecilor, bulgarilor, albanezilor, sârbilor, croaților, ungarilor etc., ocupați de otomani, au continuat rezistența și au menținut statutul de autonomie a țărilor lor. Deși au plătit tribut și alte dări turcilor, deși li s-a îngăduit politica externă, trebuind să cedeze sultanului unele dintre teritoriile lor, românii și-au menținut statele cu domni proprii, turcilor fiindu-le interzis să se așeze stabil în ele și să aibă pământuri acolo, să facă politică de atragere la islam a creștinilor și să clădească moschei. [...]

În primele decenii ale secolului al XVI-lea, domnii Țării Românești și Moldovei au dus o politică de alianțe antiotomane, deși continuau lungi perioade de timp să plătească tribut turcilor. [...] Domnii Moldovei, de la Petru Rareș până la Ion Vodă și Aron Vodă [...] au avut o politică antiotomană activă, cu rezistențe armate și cu bătălii sângeroase.”
(I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Transformarea Transilvaniei în Principat autonom sub suzeranitatea Porții [Imperiul Otoman] a însemnat o grea lovitură dată Habsburgilor, pentru care potențialul economic al acestei provincii reprezenta o puternică atracție. În același context, poziția Principatului între otomani și Habsburgi conferea, din punct de vedere militar și strategic, un considerabil avantaj pentru cel care îl controla. Prin urmare, stăpânirea noului Principat autonom a constituit o preocupare constantă a politicii externe a celor două imperii. În timpul principelui Ioan Sigismund, Transilvania a devenit teatrul unor confruntări acerbe, care s-au redeschis după moartea sultanului Süleyman Magnificul (1566). Habsburgii vor relua disputa, mai ales datorită faptului că, după epoca sultanului Süleyman, Imperiul Otoman a intrat într-o fază staționară. [...] Pacea încheiată la 21 februarie 1568, cu o durată de 8 ani, confirmă slăbiciunile otomane. Împăratul păstra în stăpânirea sa Ungaria apuseană, Dalmația, Croația și Slovenia, în timp ce Ioan Sigismund și domnitorii Țării Românești și Moldovei își mențineau controlul asupra teritoriilor aflate efectiv în posesia lor.”
(I. A. Pop, T. Năgler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Pornind de la aceste surse, răspundeți la următoarele cerințe:

1. Numiți Principatul autonom precizat în sursa **B**. **2 puncte**
2. Precizați, din sursa **A**, o informație referitoare la politica externă a domnilor români. **2 puncte**
3. Menționați două spații istorice la care se referă atât sursa **A**, cât și sursa **B**. **6 puncte**
4. Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare sursei care susține că popoarele balcanice sunt ocupate de otomani. **3 puncte**
5. Scrieți o relație cauză-efect stabilită între două informații selectate din sursa **B**, precizând rolul fiecăreia dintre aceste informații (*cauză*, respectiv *efect*). **7 puncte**
6. Prezentați alte două fapte istorice la care participă românii în secolul al XVI-lea, în afara celor precizate în sursele **A** și **B**. **6 puncte**
7. Menționați o asemănare între două acțiuni desfășurate de români în relațiile internaționale din secolele al XVII-lea – al XVIII-lea. **4 puncte**

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Citiți, cu atenție, sursa de mai jos:

„În august 1857, la Osborne, Napoleon al III-lea și regina Victoria au acceptat un compromis în problema românească: Franța renunța să mai susțină unirea deplină a Principatelor sub un prinț străin, iar Anglia și-a dat acordul pentru anularea alegerilor falsificate din Moldova și organizarea altora noi. [...]

În luna octombrie 1857, s-au deschis la București și Iași cele două Adunări ad-hoc, care [...] aveau însă prerogative limitate. Ele au fost create de marile puteri doar pentru a afla opinia poporului român față de unire. Totuși, Adunările ad-hoc au votat cu entuziasm declarații de unire a Moldovei cu Țara Românească, avansând și numele viitorului stat suveran (România), precum și dorința de instaurare a unei monarhii ereditare străine. [...]

După negocieri și compromisuri, [...] în 1858, a fost semnată Convenția de la Paris [...]. Convenția prevedea că noul stat se va numi *Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești*, va avea doi domni pământeni, două capitale, două guverne și două foruri legislative distincte. [...] Armatele celor două țări erau puse sub comandă unică, iar la Focșani se înființau o Comisie Centrală și o Înalță Curte de Casație care să elaboreze legi comune, să conducă în viitor la o uniformizare legislativă și administrativă. Convenția nu interzicea în mod expres unirea deplină, lăsând pe seama poporului român să găsească soluția cea mai potrivită. [...] În conformitate cu prevederile Convenției de la Paris, în Principate au fost constituite comisii provizorii [...] având sarcina de a asigura formarea adunărilor electivă, care urmau să desemneze cei doi domnitori. [...] La Iași, capitala Moldovei, a fost ales domnitor Al. I. Cuza, cu unanimitatea deputaților prezenți. [...] La București, [...] ideea alegerii aceluiași domnitor – și ca urmare a lipsei de precizie a Convenției de la Paris, care nu interzicea explicit alegerea aceleiași persoane ca domnitor în cele două Principate – a căpătat susținere [...]. Urmarea a fost alegerea lui Al. I. Cuza cu unanimitate de voturi.”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

Pornind de la această sursă, răspundeți la următoarele cerințe:

1. Numiți domnitorul român precizat în sursa dată. **2 puncte**
2. Precizați secolul la care se referă sursa dată. **2 puncte**
3. Menționați un stat participant la evenimentul de la Osborne și o decizie adoptată în cadrul acestui eveniment, precizate în sursa dată. **6 puncte**
4. Menționați, din sursa dată, două informații referitoare la Adunările ad-hoc. **6 puncte**
5. Formulați, pe baza sursei date, un punct de vedere referitor la Convenția de la Paris, susținându-l cu două informații selectate din sursă. **10 puncte**
6. Argumentați, printr-un fapt istoric relevant, afirmația conform căreia statul român participă la relațiile internaționale din perioada 1875-1900. (Se punctează prezentarea unui fapt istoric relevant și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea și concluzia.) **4 puncte**

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Elaborați, în aproximativ două pagini, un eseu despre România în perioada postbelică, având în vedere:

- precizarea unei acțiuni politice desfășurate în România, în perioada 1946-1947;
- menționarea a două practici politice utilizate în România, în perioada stalinismului și a câte unui aspect referitor la fiecare dintre acestea;
- prezentarea unui fapt istoric prin care România participă la relațiile internaționale din perioada *Războiului rece*;
- formularea unui punct de vedere referitor la schimbarea regimului politic din România la sfârșitul secolului al XX-lea și susținerea acestuia printr-un argument istoric.

Notă! Se punctează și utilizarea **limbajului istoric adecvat**, **structurarea** prezentării, **evidențierea relației cauză-efect**, elaborarea **argumentului istoric** (prezentarea unui fapt istoric relevant și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea și concluzia), respectarea **succesiunii cronologice/logice** a faptelor istorice și **încadrarea** eseului în limita de spațiu precizată.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ZADANIE I.

(30 bodov)

Pozorne prečitajte nasledovné zdroje:

A. „Od polovice 16. storočia [...] osmanská zvrchovanosť sa stala zaťažujúcejšia a povinnosti voči sultánovi vzrástli. [...] Kontrola Osmanskej ríše, rozšírená na celom Balkánskom polostrove až po stredný Dunaj, zvyšovala pocit neistoty národov v tejto oblasti. Predsa Rumuni (románii) vedomí ťažkého osudu Grékov, Bulharov, Albáncov, Srbov, Chorvátov, Maďarov atď., obsadených Osmanmi pokračovali v odpore a udržali štatút autonómie svojich krajín. Hoci platili tribút a iné dane Turkom, hoci im bola obmedzená zahraničná politika a museli prepustiť sultánovi niektoré zo svojich území, Rumuni si zachovali štáty s vlastnými panovníkmi a Turkom bolo zakázané trvalo sa usadiť v nich a mať tam územia, viesť politiku priťahovania kresťanov k islamu a stavať mešity. [...]

V prvých desaťročiach 16. storočia, panovníci Valaška (Țării Românești) a Moldavska (Moldovei) viedli politiku protiosmanských spojenectiev, aj keď dlhé obdobia pokračovali platiť tribút Turkom. [...] Moldavskí panovníci od Petra Rareșu (Petru Rareș) až po Iona Vodă (Ion Vodă) a Arona Vodă (Aron Vodă) [...] mali aktívnejšiu protiosmanskú politiku s vojenským odporom a krvavými bitkami.”

(I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Premena Transylvánie (Transilvaniei) na autonómny principát pod zvrchovanosťou Porty [Osmanskej ríše] znamenala ťažký úder pre Habsburgovcov, pre ktorých hospodársky potenciál tejto provincie predstavoval silnú príťažlivosť. V tom istom kontexte, postavenie principátu medzi Osmanmi a Habsburgovcami poskytovalo z vojenského a strategického hľadiska závažnú výhodu pre toho, ktorý ho kontroloval. Preto, ovládanie nového autonómneho principátu tvorilo konštantný záujem zahraničnej politiky tých dvoch ríš. Za čias princa Jána Žigmunda (Ioan Sigismund), Transylvánia sa stala dejiskom krutých zrážok, ktoré sa opäť otvorili po smrti sultána Sulejmana Nádherného (1566). Habsburgovci obnovia rozpor, najmä vďaka tomu, že po období sultána Sulejmana, Osmanská ríša vstúpila do obdobia stagnácie. [...] Mier uzavretý 21. februára 1568, ktorý trval 8 rokov, potvrdil osmanskú slabosť. Cisár naďalej ovládal západné Uhorsko, Dalmáciu, Chorvátsko a Slovinsko, pokým Ján Žigmund a panovníci Valaška a Moldavska si zachovali kontrolu nad územiami, ktoré sa efektívne nachádzali v ich vlastníctve.”

(I. A. Pop, T. Nágler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Opierajúc sa o tieto zdroje, odpovedajte na nasledovné požiadavky:

1. Menujte autonómny principát uvedený v zdroji **B**. **2 body**
2. Spresnite zo zdroja **A** informáciu o zahraničnej politike rumunských panovníkov. **2 body**
3. Uveďte dva historické priestory, na ktoré sa vzťahujú tak zdroj **A**, ako aj zdroj **B**. **6 bodov**
4. Napíšte na skúškový hárok písmeno zodpovedajúce zdroju, ktorý tvrdí, že balkánske národy sú obsadené Osmanmi. **3 body**
5. Uveďte jeden vzťah príčina–následok, medzi dvoma informáciami zo zdroja **B** a spresnite úlohu každej z nich (*príčina*, respektíve *následok*). **7 bodov**
6. Predstavte dve ďalšie historické udalosti, na ktorých sa zúčastnili Rumuni v 16. storočí, okrem tých, ktoré sú uvedené v zdrojoch **A** i **B**. **6 bodov**
7. Uveďte jednu podobnosť medzi dvoma akciami vykonanými Rumunmi v medzinárodných vzťahoch v 17. – 18. storočí. **4 body**

ZADANIE II.

(30 bodov)

Pozorne prečítajte nasledovný zdroj:

„V auguste 1857, v Osborne, Napoleon III. a kráľovná Viktória sa zhodli na kompromise v rumunskej otázke: Francúzsko sa zrieklo podpory úplného zjednotenia Kniežatstiev pod cudzím princom a Anglicko súhlasilo so zrušením sfaľovaných volieb v Moldavsku (Moldova) a s organizovaním nových volieb. [...]

V októbri 1857 otvorili v Bukurešti (București) a Iași dve Zhromaždenia ad-hoc, ktoré [...] však mali obmedzené právomoci. Tieto boli vytvorené veľmocami len preto, aby zistili mienku rumunského národa o zjednotení. Predsa, Zhromaždenia ad-hoc nadšene odhlasovali vyhlásenia o zjednotení Moldavska a Valašska (Țara Românească), uvediac aj názov budúceho zvrchovaného štátu (Rumunsko (România)), ako aj prianie nastoliť cudziu dedičnú monarchiu. [...]

Po jednaniach a kompromisoch, [...] v roku 1858, bola podpísaná Parížska dohoda (Convenția de la Paris) [...]. Dohoda uvádzala, že nový štát sa bude nazývať *Zjednotené kniežatstvá Moldavska a Valašska (Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești)*, bude mať dvoch domácich panovníkov, dve hlavné mestá, dve vlády a dva rôzne zákonodarné zbory. [...] Armády týchto dvoch krajín boli podriadené spoločnému veleniu a vo Focșani boli založené Centrálna komisia a Najvyšší súd, ktoré mali vypracovať spoločné zákony a v budúcnosti viesť k legislatívnemu a správne ujednoteniu. Dohoda výslovne nezakazovala úplné zjednotenie a nechala rumunskému národu možnosť nájsť najvhodnejšie riešenie. [...] V súlade s ustanoveniami Parížskej dohody v Kniežatstvách boli založené dočasné komisie [...] s úlohou utvoriť volebné zhromaždenia, ktoré mali vymenovať dvoch panovníkov. [...] V Iași, hlavnom meste Moldavska, bol za panovníka prítomnými poslancami jednohlasne zvolený Al. I. Cuza. [...] V Bukurešti [...] myšlienka zvolenia toho istého panovníka – aj ako dôsledok nepresnosti Parížskej dohody, ktorá výslovne nezakazovala zvolenie tej istej osoby za panovníka v obidvoch Kniežatstvách – získala podporu [...]. Následok bol jednohlasné zvolenie Al. I. Cuzu (Al. I. Cuza).”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

Opierajúc sa o tento zdroj, odpovedajte na nasledovné požiadavky:

1. Menujte rumunského panovníka uvedeného v danom zdroji. **2 body**
2. Spresnite storočie, na ktoré sa vzťahuje daný zdroj. **2 body**
3. Uveďte štát, ktorý sa zúčastnil na udalosti v Osborne a rozhodnutie prijaté v rámci tejto udalosti, uvedené v danom zdroji. **6 bodov**
4. Z daného zdroja uveďte dve informácie vzťahujúce sa na Zhromaždenia ad-hoc. **6 bodov**
5. Na základe daného zdroja sformulujte stanovisko vzťahujúce sa na Parížsku dohodu a podporte ho dvoma informáciami zo zdroja. **10 bodov**
6. Argumentujte za pomoci významnej historickej udalosti tvrdenie, podľa ktorého sa rumunský štát zúčastňoval na medzinárodných vzťahoch v období 1875-1900. (Boduje sa opísanie významnej historickej udalosti a používanie spojiviek, ktoré vyjadrujú kauzalitu, ako i závery.) **4 body**

ZADANIE III.

(30 bodov)

Vypracujte na približne dvoch stranách esej o Rumunsku (România) v povojnovom období, majúc na zreteli:

- spresnenie politickej akcie, ktorá sa uskutočnila v Rumunsku v období 1946-1947;
- uvedenie dvoch politických praktík, používaných v Rumunsku v období stalinizmu a po jednom aspekte vzťahujúcom sa na každú z nich;
- predstavenie historickej skutočnosti, ktorou sa Rumunsko zúčastnilo na medzinárodných vzťahoch v období *Studenej vojny*;
- sformulovanie stanoviska vzťahujúceho sa na zmenu politického režimu v Rumunsku koncom 20. storočia a podporenie tohto stanoviska historickým argumentom.

Poznámka! Boduje sa aj používanie **adekvátneho historického vyjadrovania**, **štruktúra prezentácie**, zdôraznenie **vzťahu príčina - následok**, vypracovanie **historickej argumentácie** (opísanie jednej významnej historickej udalosti a používanie spojiviek, ktoré vyjadrujú kauzalitu, ako i záver) **dozrievanie chronologického/logického sledu** historických udalostí a **zaradenie** eseje do spresneného rozsahu.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

СУБЈЕКАТ I

(30 бодова)

Прочитајте, пажљиво, ниженаведене изворе:

A. „Од половине XVI-ог века [...] османско сузеренство постаје све јаче, а расте и обавезе према султану. [...] Контрола Османског царства, која се проширила на целом Балканском полуострву све до средњег Дунава, повећава осећај несигурности народа из овог региона. Ипак, Румуни, свесни тешке судбине Грка, Бугара, Албанаца, Срба, Хрвата, Угара итд., освојени од стране Османлија, наставили су отпор и задржали статус аутономије својих земаља. Иако су плаћали данак и остале дажбине Турцима, иако им се ограничавала спољна политика, морајући да уступе султану одређене територије, Румуни су задржали земље са својим владарима, а Турцима им је било забрањено да се стално настане у њима и да имају тамо земље, да воде политику привлачења хришћана ка исламу и да граде москеје.[...]”

У првим деценијама XVI-ог века, владари Влашке (Țării Românești) и Молдавије (Moldovei) водили су политику противосманских савеза, иако су дуго времена наставили да плаћају данак Турцима. [...] Владари Молдавије, од Петра Рареша (Petru Rareș) све до Јона Воде (Ion Vodă) и Арона Воде (Aron Vodă) [...] водили су активну противосманску политику, са војним отпором и крвавим биткама.”

(I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Претварање Трансилваније (Transilvaniei) у аутономни Принципат под сузеренством Порте [Османско царство] представља тежак ударац за Хабзбурговце, којима економски потенцијал ове провинције представља снажну привлачност. У истом контексту, положај Принципата између Османлија и Хабзбурговаца пружа, са војне и стратешке тачке гледишта, значајну предност оном који их контролише. Као последица, владавина над новим аутономним Принципатом представља константно залагање спољне политике оба царства. За време принца Јоана Жигмунда, Трансилванија постаје сцена жестоких сукоба, који су поново отпочели након смрти султана Сулејмана Величанственог (1566). Хабзбурговци су обновили сукоб, нарочито, због тога што, након епохе султана Сулејмана, Османско царство је ушло у статичну фазу. [...] Мир склопљен 21. фебруара 1568, у трајању од 8 година, потврђује османске слабости. Цар задржава власт над западном Угарском, Далмацијом, Хрватском и Словенијом, док Јоан Жигмунд и владари Влашке и Молдавије задржавају контролу над територијама које се налазиле у њиховом власништву.”

(I. A. Pop, T. Năgler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Полазећи од ових извора, одговорите на следеће захтеве:

1. Напомените аутономни Принципат наведен у извору **Б**. **2 бода**
2. Одредите, из извора **A**, једну информацију која се односи спољну политику румунских владара. **2 бода**
3. Наведите два историјска простора назначених како у извору **A**, тако и у извору **Б**. **6 бодова**
4. Напишите, на испитни папир, слово које одговара извору који тврди да балкански народи се налазе под османску власт. **3 бода**
5. Напишите једну везу узрок-последница између две информације из извора **Б**, назначивши улогу сваке понаособ (*узрок*, односно *последница*). **7 бодова**
6. Представите друга два историјска догађаја у којима учествују Румуни у XVI-ом веку, осим оних на који се односе извори **A** и **Б**. **6 бодова**
7. Наведите једну сличност између два поступка Румуна у међународним односима у XVII-ом – XVIII-ом веку. **4 бода**

СУБЈЕКАТ II

(30 бодова)

Прочитајте, пажљиво, ниженаведени извор:

„У августу 1857, у Озборну, Наполеон III и краљица Викторија прихватили су компромис о румунском питању: Француска одустаје да подржава потпуно уједињење Принципата под страним принцем, док Енглеска је сагласна за поништавање фалсификованих избора из Молдавије (Moldova) и организовање нових. [...]

У октобру 1857, отварају се у Букурешту (București) и Јашу (Iași) две Скупштине ад-хок, које [...] су имале ограничене надлежности. Створене су од стране великих сила једино да би сазнале мишљење румунског народа о уједињењу. Ипак, Скупштине ад-хок су са ентузијазмом изгласале декларације о уједињењу Молдавије са Влашком (Țara Românească), представљајући и назив суверене државе (Румунија) (România), као и жељу о успостављању стране наследне монархије. [...]

Након преговора и компромиса, [...] 1858., потписана је Париска конвенција (Convenția de la Paris) [...]. Конвенција предвиђа да нова држава ће се називати *Уједињени Принципати Молдавије и Влашке (Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești)*, имајући два земаљска владара, две престонице, две владе, два засебна законодавна тела. [...] Војске обе државе стављене су под заједничком командом, а у Фокшању (Focșani) се оснива Централна комисија и Врховни Касациони суд који ће састављати заједничке законе, које ће у будућности довести до административног и законодавног јединства. Конвенција не забрањује изричито потпуно уједињење, остављајући румунском народу да пронађе одговарајуће решење. [...] У складу са предвиђањима Париске конвенције, у Принципатима су основане привремене комисије [...] задужене да обезбеде стварање изборних скупштина, које ће одредити двојцу владара. [...] У Јашу, престоници Молдавије, био је изабран за владара Ал. Ј. Куза (Al. I. Cuza), једногласно од стране присутних посланика. [...] У Букурешту, [...] идеја избора истог владара – и као последица нејасности предвиђања Париске конвенције, која не изричито забрањује избор исте особе за владара у оба Принципата – добија подршку [...]. Последица је једногласни избор Ал. Ј. Кузе.”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

Полазећи од овог извора, одговорите на следеће захтеве:

1. Напомените румунског владара наведеног у извору. **2 бода**
2. Утврдите век на који се односи извор. **2 бода**
3. Наведите државу која учествује на догађају у Озборну и једну усвојену одлуку на овом догађају, на које се односи дати извор. **6 бодова**
4. Наведите, из датог извора, две информације о Скупштинама ад-хок. **6 бодова**
5. Формулишите, на основу датог извора, мишљење о Париској конвенцији, подржавајући га са две информације из извора. **10 бодова**
6. Аргументујте, путем историјског догађаја, тврдњу да румунска држава учествује у међународним односима у периоду 1875-1900. (Бодује се представљање историјског догађаја и употреба појмова који изражавају узрочност и закључак). **4 бода**

СУБЈЕКАТ III

(30 бодова)

Израдите, на приближно две странице, есеј о Румунији у послератном периоду, имајући у виду:

- напомену једне политичке акције која се одвија у Румунији, у периоду 1946-1947;
- напомену двеју политичких пракси примењених у Румунији, у време стаљинизма и по једну чињеницу која се односи на сваку;
- представљање једног историјског догађаја са којим Румунија учествује у међународним односима у време *Хладног рата*;
- формулисање мишљења о промени политичког режима у Румунији крајем XX-ог века и подржати га једним историјским аргументом.

Напомена! Бодује се употреба **адекватног историјског речника**, **структура** есеја, представљање **везе узрок-последица**, сачињавање **историјског аргумента** (представљање релевантне историјске чињенице и употреба појмова који представљају узрочност и закључак), поштовање **хронолошког/логичног редоследа** историјских чињеница и **уклапање** есеја у оквиру захтеваног простора.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z(z-2i) = (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9+1=10$	3p 2p
2.	$f(2x) = 10x+1$, pentru orice număr real x $f(2x) - 2f(x) = 10x+1 - 2(5x+1) = 10x+1 - 10x - 2 = -1$, pentru orice număr real x	2p 3p
3.	$x^3 - 2x + 2 = x^3$, deci $-2x + 2 = 0$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = 4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d = 4$ Ecuația dreptei este $y - 0 = 4(x - 0)$, adică $y = 4x$	3p 2p
6.	$AD = \frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = 4$, de unde obținem $BC = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 0 - 0 - 0 + 2 = 8$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a + 8$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$	2p 3p
c)	Pentru $a = -2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2, -2 - 2\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0 z_0 + y_0 = 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații	3p 2p
2.a)	$2 \circ 3 = 2 \cdot 3 + (2^2 - 2)(2^3 - 2) = 6 + 12 = 18$	3p 2p

b)	$x \circ 1 = x \cdot 1 + (2^x - 2)(2^1 - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$1 \circ x = 1 \cdot x + (2^1 - 2)(2^x - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	3p
c)	$x \circ (-x) = -x^2 + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} + 4 =$	2p
	$= -x^2 + 1 - 2 \cdot \left(2^x - 2 + \frac{1}{2^x}\right) = 1 - x^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \leq 1$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + 3(\ln(x+3) - \ln(x-1))' = 1 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-1} =$ $= \frac{x^2 + 2x - 3 + 3x - 3 - 3x - 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+3)(x-1)}$, $x \in (1, +\infty)$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
		3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	3p
	$f(3) = 3 + 3 \ln 3$, deci $x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1} \geq 3 + 3 \ln 3$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 9 = 18$	3p
		2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) \Big _0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx =$ $= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$	3p
		2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^2)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^{-x}}{2} = 1$	2p
		3p

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p** 1. Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 3 + i$. Zeige, dass $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Zeige, dass $f(2x) - 2f(x) = -1$, für jede reelle Zahl x .
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Gegeben ist die Menge der natürlichen zweistelligen Zahlen A . Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass für eine gewählte Zahl n aus der Menge A , die Zahl $n + 5$ ein Vielfaches von 10 ist.
- 5p** 5. Gegeben sind die Punkte $A(4, 0)$ und $B(5, 4)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Bestimme die Gleichung der Geraden d , die durch den Punkt O parallel zur Geraden AB geht.
- 5p** 6. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC , rechtwinklig in A mit dem Flächeninhalt gleich 4. Zeige, dass $BC = 4$.

THEMA II

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$
- wobei a eine reelle Zahl ist.
- 5p** a) Zeige, dass $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Bestimme die Menge der reellen Zahlen a so, dass die Matrix $A(a)$ umkehrbar ist.
- 5p** c) Für $a = -2$ zeige, dass $x_0 z_0 + y_0 = -2$ für jede Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems.
2. Man definiert in der Menge der reellen Zahlen die Verknüpfung $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Zeige, dass $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Zeige, dass $e = 1$ das neutrale Element der Verknüpfung „ \circ ” ist.
- 5p** c) Beweise, dass $x \circ (-x) \leq 1$ für jede reelle Zahl x .

THEMA III

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f .
- 5p** c) Zeige, dass $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, für alle $x \in (1, +\infty)$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Zeige, dass $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** b) Zeige, dass $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** c) Beweise, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Adott a $z = 3 + i$ komplex szám. Igazolja, hogy $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$ függvény. Igazolja, hogy $f(2x) - 2f(x) = -1$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$ egyenletet!
- 5p** 4. Jelöljük A -val a kétjegyű természetes számok halmazát. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az A halmazból véletlenszerűen kiválasztott n szám esetén az $n + 5$ a 10 -nek többszöröse legyen!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4, 0)$ és $B(5, 4)$ pontok. Határozza meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az O ponton és párhuzamos az AB egyenessel!
- 5p** 6. Adott az ABC , A -ban derékszögű, egyenlő szárú háromszög, amelynek területe 4. Igazolja, hogy $BC = 4$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix és a $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Határozza meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az $A(a)$ mátrix invertálható!
- 5p** c) $a = -2$ esetén igazolja, hogy $x_0 z_0 + y_0 = -2$, az egyenletrendszer bármely (x_0, y_0, z_0) megoldása esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $e = 1$ a „ \circ ” művelet semleges eleme!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $x \circ (-x) \leq 1$, bármely x valós szám esetén!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, bármely $x \in (1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.

5p c) Bizonyítsa be, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 bodeva)

- 56 1. Smatra se комплексni broj $z = 3 + i$. Докажите да $z(z - 2i) = 10$.
- 56 2. Smatra se функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Докажите да $f(2x) - 2f(x) = -1$, за било који реални број x .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 56 4. Smatra se skup A , skup двоцифрених природних бројева. Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број n из скупа A , број $n + 5$ да буде мултиплу (садржилац) од 10.
- 56 5. У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(4, 0)$ и $B(5, 4)$. Одредите једначину праве d која садржи тачку O и је паралелна са правом AB .
- 56 6. Smatra se једнакокраки троугао ABC , правоугли у A , са површином од 4. Докажите да $BC = 4$.

SUBIECTUL II

(30 бодова)

1. Smatra se матрица $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ и систем једначина $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, где a јесте реални број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(0)) = 8$.
- 56 б) Одредите скуп реалних бројева a тако да матрица $A(a)$ прихвати инверзну матрицу.
- 56 в) За $a = -2$, докажите да $x_0 z_0 + y_0 = -2$, за било које решење (x_0, y_0, z_0) система једначина.
2. На скупу реалних бројева дефинише се закон слагања $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 56 а) Докажите да $2 \circ 3 = 18$.
- 56 б) Докажите да $e = 1$ јесте неутрални елемент закона слагања „ \circ ”.
- 56 в) Докажите да $x \circ (-x) \leq 1$, за било који реални број x .

SUBIECTUL III

(30 бодова)

1. Smatra se функција $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 56 б) Одредите једначину косе асимптоте према $+\infty$ на графику функције f .
- 56 в) Докажите да $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, за било који $x \in (1, +\infty)$.
2. Smatra se функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 56 а) Докажите да $\int_0^3 f(x) e^x dx = 18$.

- 56 b) Докажите да $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 56 c) Докажите да $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5p** 1. Розглядають комплексне число $z = 3 + i$. Докажіть, що $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Дано функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Докажіть, що $f(2x) - 2f(x) = -1$, для будь-якого дійсного числа x .
- 5p** 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Розглядають множину A яка складається з двоцифрових натуральних чисел. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи одне число n з множини A , число $n + 5$ є кратним 10.
- 5p** 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(4, 0)$ і $B(5, 4)$. Напишіть рівняння прямої d яка проходить через точку O і є паралельною до прямої AB .
- 5p** 6. Розглядають прямокутний рівнобедрений трикутник ABC , A - прямиий кут, площа якого дорівнює 4. Докажіть, що $BC = 4$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Дано матрицю $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ і систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, де a дійсне число.
- 5p** а) Докажіть, що $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** б) Визначте множину дійсних чисел a для яких матриця $A(a)$ є обертаючою.
- 5p** в) Для $a = -2$, докажіть, що $x_0 z_0 + y_0 = -2$, для будь-якого розв'язку (x_0, y_0, z_0) системи рівнянь.
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** а) Докажіть, що $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** б) Докажіть, що $e = 1$ - нейтральний елемент для закону композиції „ \circ ”.
- 5p** в) Докажіть, що $x \circ (-x) \leq 1$, для будь-якого дійсного числа x .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Дано функцію $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** б) Напишіть рівняння похилої асимптоти до $+\infty$ для графіка функції f .
- 5p** в) Докажіть, що $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, для будь-якого $x \in (1, +\infty)$.
2. Дано функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** а) Докажіть, що $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Докажіть, що $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Докажіть, що $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{pedagogic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{169} = 5 + 8 - 13 =$ $= 13 - 13 = 0$	3p 2p
2.	$2n + 2 \geq n^2 + 2$ $2n \geq n^2$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ sau $n = 1$ sau $n = 2$	2p 3p
3.	$\log_3(2x - 1) = 1$, de unde obținem $2x - 1 = 3$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	După prima scumpire cu 20%, prețul obiectului este $150 + \frac{20}{100} \cdot 150 = 180$ de lei După a doua scumpire cu 20%, prețul obiectului este $180 + \frac{20}{100} \cdot 180 = 216$ lei	2p 3p
5.	M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow 3 = \frac{0 + x_B}{2}$, $6 = \frac{4 + y_B}{2}$ $x_B = 6$, $y_B = 8$	3p 2p
6.	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	$2 * (-2) = 2 + (-2) - 4 =$ $= 0 - 4 = -4$	3p 2p
2.	$(x * y) * z = (x + y - 4) * z = (x + y - 4) + z - 4 = x + y + z - 8$, pentru orice numere reale x , y și z $x * (y * z) = x * (y + z - 4) = x + (y + z - 4) - 4 = x + y + z - 8 = (x * y) * z$, pentru orice numere reale x , y și z , deci legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă	2p 3p
3.	$(1 * 2 * 3) * (4 * 5 * 6) = (-2) * 7 =$ $= -2 + 7 - 4 = 1 > 0$	3p 2p
4.	$x * x * x = 3x - 8$, $(x + 1) * x = 2x - 3$, pentru orice număr real x $3x - 8 = 2x - 3$, de unde obținem $x = 5$	2p 3p
5.	$4^x * 2^x = 4^x + 2^x - 4$, pentru orice număr real x $4^x + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(2^x + 3) = 0$, de unde obținem $x = 1$	2p 3p
6.	$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \geq -2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \geq 0$, pentru orice număr real nenul x $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$, deci $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, pentru orice număr real nenul x	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 =$ $= -1 - 0 = -1$	3p 2p
2.	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Cum $B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obținem $A \cdot A - B \cdot B = O_2$</p>	2p 3p
3.	$A \cdot A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$, deci $\det(A \cdot A - xI_2) = (1-x)^2$, pentru orice număr real x $(1-x)^2 = 0$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
4.	$A - B - xI_2 = \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
5.	$a(A + B) = \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ a & -2a \end{pmatrix}$, deci $\det(a(A + B)) = -6a^2$, pentru orice număr real a $-6a^2 = -6$, de unde obținem $a = -1$ sau $a = 1$	3p 2p
6.	$A^{-1} = A \Rightarrow X = A \cdot B$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{pedagogic}$

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p** 1. Zeige, dass $\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{169} = 0$.
- 5p** 2. Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$, und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$. Bestimme die natürlichen Zahlen n so, dass $f(n) \geq g(n)$.
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2 + \log_3(2x - 1) = \log_3 27$.
- 5p** 4. Der Preis eines Gegenstandes ist 150 Lei. Bestimme den Preis des Gegenstandes nach zwei aufeinanderfolgenden Teuerungen um je 20%.
- 5p** 5. Gegeben sind die Punkte $A(0,4)$ und $M(3,6)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Bestimme die Koordinaten des Punktes B , wobei der Punkt M die Mitte der Strecke AB ist.
- 5p** 6. Zeige, dass $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

THEMA II

(30 Puncte)

Man definiert in der Menge der reellen Zahlen die Verknüpfung $x * y = x + y - 4$.

- 5p** 1. Zeige, dass $2 * (-2) = -4$.
- 5p** 2. Zeige, dass die Verknüpfung „*“ assoziativ ist.
- 5p** 3. Zeige, dass $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 > 0$.
- 5p** 4. Bestimme die reelle Zahl x so, dass $x * x * x = (x + 1) * x$.
- 5p** 5. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $4^x * 2^x = 2$.
- 5p** 6. Zeige, dass $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, für jede reelle, von Null verschiedene Zahl x .

THEMA III

(30 Puncte)

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** 1. Zeige, dass $\det A = -1$.
- 5p** 2. Zeige, dass $A \cdot A - B \cdot B = O_2$.
- 5p** 3. Bestimme die reelle Zahl x so, dass $\det(A \cdot A - xI_2) = 0$.
- 5p** 4. Bestimme die reelle Zahl x so, dass $A - B - xI_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5p** 5. Bestimme die reellen Zahlen a so, dass $\det(a(A + B)) = -6$.
- 5p** 6. Löse in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ die Gleichung $A \cdot X = B$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{pedagogic}$

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățator-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{169} = 0$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$, és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$ függvény. Határozza meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $f(n) \geq g(n)$.
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2 + \log_3(2x - 1) = \log_3 27$ egyenletet!
- 5p 4. Egy tárgy ára 150 lej. Határozza meg a tárgy árát két egymást követő 20%-os áremelés után!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(0,4)$ és az $M(3,6)$ pont. Határozza meg a B pont koordinátáit tudva azt, hogy az M pont az AB szakasz felezőpontja!
- 5p 6. Igazolja, hogy $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 4$ műveletet.

- 5p 1. Igazolja, hogy $2 * (-2) = -4$.
- 5p 2. Igazolja, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!
- 5p 3. Igazolja, hogy $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 > 0$.
- 5p 4. Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $x * x * x = (x + 1) * x$.
- 5p 5. Oldja meg a valós számok halmazán a $4^x * 2^x = 2$ egyenletet!
- 5p 6. Igazolja, hogy $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, bármely zérótól különböző x valós szám esetén!

III. FELADATSOR

(30 pont)

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.

- 5p 1. Igazolja, hogy $\det A = -1$.
- 5p 2. Igazolja, hogy $A \cdot A - B \cdot B = O_2$.
- 5p 3. Határozza meg azt a valós x számot, amelyre $\det(A \cdot A - xI_2) = 0$.
- 5p 4. Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $A - B - xI_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5p 5. Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre $\det(a(A + B)) = -6$.
- 5p 6. Oldja meg az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon az $A \cdot X = B$ egyenletet!

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{pedagogic}$

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{169} = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$. Determinați numerele naturale n pentru care $f(n) \geq g(n)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 + \log_3(2x - 1) = \log_3 27$.
- 5p** 4. Prețul unui obiect este de 150 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, cu câte 20%.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$ și $M(3,6)$. Determinați coordonatele punctului B , știind că punctul M este mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y - 4$.

- 5p** 1. Arătați că $2 * (-2) = -4$.
- 5p** 2. Arătați că legea de compoziție „*” este asociativă.
- 5p** 3. Arătați că $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 > 0$.
- 5p** 4. Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = (x + 1) * x$.
- 5p** 5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x * 2^x = 2$.
- 5p** 6. Arătați că $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, pentru orice număr real nenul x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** 1. Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** 2. Arătați că $A \cdot A - B \cdot B = O_2$.
- 5p** 3. Determinați numărul real x pentru care $\det(A \cdot A - xI_2) = 0$.
- 5p** 4. Determinați numărul real x pentru care $A - B - xI_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5p** 5. Determinați numerele reale a pentru care $\det(a(A + B)) = -6$.
- 5p** 6. Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A \cdot X = B$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{pedagogic}$

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Докажіть, що $\sqrt{25} + \sqrt{64} - \sqrt{169} = 0$.
- 5р 2. Розглядають функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$. Знайдіть натуральні числа n для яких $f(n) \geq g(n)$.
- 5р 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $2 + \log_3(2x - 1) = \log_3 27$.
- 5р 4. Ціна товару 150 лей. Знайдіть ціну товару після двох послідовних подорожчань на 20%.
- 5р 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(0, 4)$ і $M(3, 6)$. Знайдіть координати точки B знаючи, що точка M середина відрізка AB .
- 5р 6. Докажіть, що $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

На множині дійсних чисел задають закон композиції $x * y = x + y - 4$.

- 5р 1. Докажіть, що $2 * (-2) = -4$.
- 5р 2. Докажіть, що закон композиції „*” є асоціативним.
- 5р 3. Докажіть, що $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 > 0$.
- 5р 4. Знайдіть дійсне число x для якого $x * x * x = (x + 1) * x$.
- 5р 5. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $4^x * 2^x = 2$.
- 5р 6. Докажіть, що $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -2$, для будь-якого ненульового дійсного числа x .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5р 1. Докажіть, що $\det A = -1$.
- 5р 2. Докажіть, що $A \cdot A - B \cdot B = O_2$.
- 5р 3. Визначте дійсне число x для якого $\det(A \cdot A - xI_2) = 0$.
- 5р 4. Визначте дійсне число x для якого $A - B - xI_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5р 5. Знайдіть дійсні числа a для яких $\det(a(A + B)) = -6$.
- 5р 6. У $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ розв'яжіть рівняння $A \cdot X = B$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3 =$ $= 4 - 3 = 1$	3p 2p
2.	$5a - 3 = 2a + 3$ $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{2x+4} = 2^0$, de unde obținem $2x + 4 = 0$ $x = -2$	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$M(2,1)$, de unde obținem $MO = \sqrt{5}$ $MC = \sqrt{5}$, deci $MO = MC$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 =$ $= 3 - 2 = 1$	3p 2p
b)	$A(a) - A(0) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$ $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI_2$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(a^2) = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 2-2a^2 \\ 1-a^2 & 1+3a^2 \end{pmatrix}$, $A(a^2) - aA(a) = \begin{pmatrix} 3-3a & 2-2a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ $\det(A(a^2) - aA(a)) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$, pentru orice număr real a	2p 3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 =$ $= 0 - 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$(2x) \circ x = -x^2$, pentru orice număr real x $-x^2 = -1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

c)	$m \circ n = m^2 - mn - 3mn + 3n^2 = (m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	2p
	$(m-n)(m-3n) = 3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m < n$, obținem perechile $(-4, -1)$ și $(0, 1)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^2 - (4x-4) \cdot 2x}{x^4} =$	3p
	$= \frac{4x(2-x)}{x^4} = \frac{4(2-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4x-4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 5$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 5$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	$f(1) = 5$, $f(2) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, deci $5 \leq f(x) \leq 6$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, de unde obținem $ f(x) - f(y) \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = \int_1^e 4x \ln x dx = \int_1^e (2x^2)' \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - x^2 \Big _1^e =$	3p
	$= 2e^2 - 0 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	2p
c)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x), x \in (0, +\infty)$	2p
	$\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big _1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	3p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p 1. Zeige, dass $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p 2. Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $f(a) = g(a)$.
- 5p 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p 4. Bestimme wie viele natürliche zweistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern kann man mit den Ziffern aus der Menge $A = \{3, 4, 5, 6\}$ bilden.
- 5p 5. Gegeben sind die Punkte $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy und M die Mitte der Strecke AB . Zeige, dass die Strecken MO und MC gleiche Längen haben.
- 5p 6. Gegeben ist $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, wobei x eine reelle Zahl ist. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

THEMA II

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, wobei a eine reelle Zahl ist.
- 5p a) Zeige, dass $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Zeige, dass $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, für jede reelle Zahl a .
- 5p c) Beweise, dass $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, für jede reelle Zahl a .
2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p a) Zeige, dass $0 \circ 2 = 12$.
- 5p b) Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $(2x) \circ x = -1$.
- 5p c) Bestimme die Paare (m, n) von ganzen Zahlen, mit $m < n$, so, dass $m \circ n = 3$.

THEMA III

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f .
- 5p c) Beweise, dass $|f(x) - f(y)| \leq 1$, für alle $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p a) Zeige, dass $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p b) Zeige, dass $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p c) Beweise, dass $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, für jede Stammfunktion $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktion f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

PRIMO QUESITO

(30 puncti)

- 5p** 1. Demonstrate che $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Si considerano le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinate il numero reale a per il quale $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinate quanti numeri naturali, di due cifre diverse fra loro, possono essere formati con le cifre dell'insieme $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. Nel riferimento cartesiano xOy si considerano i punti $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ ed M il punto medio del segmento AB . Dimostrate che i segmenti MO ed MC hanno lunghezze uguali.
- 5p** 6. Si considera $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, con x numero reale. Dimostrate che $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SECONDO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considerano le matrici $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, con a numero reale.
- 5p** a) Dimostrate che $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Dimostrate che $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, per qualunque numero reale a .
- 5p** c) Dimostrate che $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, per qualunque numero reale a .
2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Dimostrate che $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinate i numeri reali x per i quali $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinate le coppie (m, n) di numeri interi, con $m < n$, per le quali $m \circ n = 3$.

TERZO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Dimostrate che $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinate l'equazione dell'assintoto orizzontale verso $+\infty$ al grafico della funzione f .
- 5p** c) Dimostrate che $|f(x) - f(y)| \leq 1$, per qualsiasi $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Dimostrate che $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Dimostrate che $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.

5p c) Dimostrate che $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, per qualunque primitiva $F:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ della funzione f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$ függvények. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre teljesül az $f(a) = g(a)$ egyenlőség!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg azt, hogy az $A = \{3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemeinek felhasználásával hány darab, különböző számjegyekből álló kétjegyű természetes szám képezhető!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ pontok, valamint az AB szakasz M felezőpontja. Igazolja, hogy az MO és MC szakaszok egyenlő hosszúságúak!
- 5p** 6. Adott az $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$ kifejezés, ahol x valós szám. Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, bármely a valós szám esetén!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, bármely a valós szám esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre teljesül a $(2x) \circ x = -1$ egyenlőség!
- 5p** c) Határozza meg azokat az (m, n) , $m < n$, egész számpárokat, amelyekre $m \circ n = 3$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $|f(x) - f(y)| \leq 1$, bármely $x, y \in [1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.

5p c) Bizonyítsa be, hogy $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, az f függvény bármely $F:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitívje esetén!

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ și M , mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
- 5p 6. Se consideră $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Demonstrați că $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p a) Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Докажіть, що $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5р 2. Розглядають функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Знайдіть дійсне число a для якого $f(a) = g(a)$.
- 5р 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5р 4. Знайдіть скільки двоцифрових різних натуральних чисел можна утворити з цифрами множини $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5р 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ і M - середина відрізка AB . Докажіть, що відрізки MO і MC мають однакові довжини.
- 5р 6. Дано $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, де x - дійсне число. Докажіть, що $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Дано матриці $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, де a - дійсне число.
- 5р а) Докажіть, що $\det(A(0)) = 1$.
- 5р б) Докажіть, що $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, для будь-якого дійсного числа a .
- 5р в) Докажіть, що $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, для будь-якого дійсного числа a .
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5р а) Докажіть, що $0 \circ 2 = 12$.
- 5р б) Визначте дійсні числа x для яких $(2x) \circ x = -1$.
- 5р в) Визначте пари (m, n) цілих чисел, де $m < n$, для яких $m \circ n = 3$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5р а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5р б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до $+\infty$ для графіка функції f .
- 5р в) Докажіть, що $|f(x) - f(y)| \leq 1$, для будь-якого $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5р а) Докажіть, що $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5р б) Докажіть, що $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5р в) Докажіть, що $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, для будь-якої первісної $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ для функції f .

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	3p 2p
2.	$f(a) = a + 2$ $a + 2 = 6$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
3.	$2x + 1 = 9$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n \geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{14}{23}$	2p 3p
5.	$x_M = \frac{-1+1}{2} = 0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB $y_M = \frac{2+6}{2} = 4$	3p 2p
6.	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2}$ $AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$ $= 3 - 4 = -1$	3p 2p
b)	$2B - A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3C$	3p 2p
c)	$B + 2C = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $X = \frac{1}{2}(B + 2C) \cdot A^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$5 * 4 = (5 - 4)(4 - 4) + 4 =$ $= 1 \cdot 0 + 4 = 4$	3p 2p

b)	$x \cdot 6 = 2x - 4$, pentru orice număr real x $2x - 4 = 6x$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$\left(\frac{4}{n} - 4\right)(n - 4) + 4 > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 4) > 0$, unde n este număr natural nenul Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$ și $n = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot 2x - 15 =$ $= 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 1$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -5]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-5, 1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 3(2x + 4), x \in \mathbb{R}$, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{e^x (2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{e^x (2x + 6)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x (2x + 8)} = 0$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big _0^1 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{x + 9} dx = \int_1^6 \frac{(x + 9)'}{x + 9} dx = \ln(x + 9) \Big _1^6 =$ $= \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^3 f(x^2) dx = \int_0^3 \frac{8x^2}{x^2 + 9} dx = 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9}\right) dx = 8x \Big _0^3 - 8 \cdot \frac{9}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big _0^3 = 24 - 6\pi$ $24 - 6\pi = 6(4 + a\pi)$, de unde obținem $a = -1$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p 1. Zeige, dass $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.
- 5p 2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $f(a) = 6$.
- 5p 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$.
- 5p 4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte Zahl n aus der Menge $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$, die Ungleichung $n \geq 10$ erfüllt.
- 5p 5. Gegeben sind die Punkte $A(-1, 2)$ und $B(1, 6)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Bestimme die Koordinaten der Mitte der Strecke AB .
- 5p 6. Gegeben ist das Dreieck ABC , rechtwinklig in A , mit $AC = \sqrt{2}$ und $BC = 2$. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

THEMA II

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Zeige, dass $\det A = -1$.
- 5p b) Zeige, dass $2B - A = 3C$.
- 5p c) Bestimme die Matrix $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ so, dass $2X \cdot A = B + 2C$.
2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$.
- 5p a) Zeige, dass $5 * 4 = 4$.
- 5p b) Bestimme die reelle Zahl x so, dass $x * 6 = 6x$.
- 5p c) Bestimme die natürlichen, von Null verschiedenen Zahlen n so, dass $\frac{4}{n} * n > 4$.

THEMA III

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$.
- 5p a) Zeige, dass $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f .
- 5p c) Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x + 9}$.
- 5p a) Zeige, dass $\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = 4$.
- 5p b) Zeige, dass $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.
- 5p c) Bestimme die reelle Zahl a so, dass $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ függvény. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $f(a) = 6$.
- 5p 3. Oldja meg a $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott n eleme teljesítse az $n \geq 10$ egyenlőtlenséget!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-1, 2)$ és $B(1, 6)$ pontok. Határozza meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AC = \sqrt{2}$ és $BC = 2$. Igazolja, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det A = -1$.
- 5p b) Igazolja, hogy $2B - A = 3C$.
- 5p c) Határozza meg azt az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $2X \cdot A = B + 2C$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $5 * 4 = 4$.
- 5p b) Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $x * 6 = 6x$.
- 5p c) Határozza meg azokat a nullától különböző n természetes számokat, amelyekre $\frac{4}{n} * n > 4$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozza meg az f függvény monotonitási intervallumait!
- 5p c) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.
2. Adott az $f: (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x+9}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_0^1 (x+9) \cdot f(x) dx = 4$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.
- 5p c) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n \geq 10$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC = 2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Arătați că $2B - A = 3C$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$.
- 5p a) Arătați că $5 * 4 = 4$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = 6x$.
- 5p c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n} * n > 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.
2. Se consideră funcția $f: (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x + 9}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = 4$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.