

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 5$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$ függvény. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre teljesül az $f(a) + f(3a) = 0$ egyenlőség!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán az $5^{3x} \cdot 5^2 = 5^x$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg, hogy az $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ halmaznak hány olyan kételemű részhalmaza van, amelyben mindkét elem páros szám!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(3,1)$ és $B(3,0)$ pont. Határozza meg annak a C pontnak a koordinátáit, amelyre $\overline{AC} = \overline{OB}$.
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszög területe 18, és $B = \frac{\pi}{4}$. Igazolja, hogy $AB = 6$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(M(1)) = 7$.
- 5p b) Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $M(x) \cdot M(2) = M(x-1)$.
- 5p c) Határozza meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $2\det(M(n)) \leq \det(M(2n))$.
2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 - aX + 2a$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $f(2) = 0$, bármely a valós szám esetén!
- 5p b) Ha $a = 1$, igazolja, hogy az f polinom osztható a $g = X + 1$ polinommal!
- 5p c) Határozza meg $a \in (0, +\infty)$ azon értékét, amelyre $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 8$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x-4) + x^2 - 2x + 4$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = 2(x-1)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = 4$.
- 5p c) Igazolja, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan két megoldása van!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 1}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_3^4 f(x)(3x^2 + 1) dx = 14$.

-
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} \ln 2$.
- 5p** c) Igazolja, hogy a $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{4 \ln x}{f(x)}$ függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\frac{3e^2 + 5}{4}$.